Problem 1

a) 自反(√) 反对称(√) 传递(√) 是 b) 反对称(×) 不是

c) 自反(√) 反对称(√) 传递(√) 是 d) 自反(×) 不是

Problem 2

a) {0}和{1} b) 4和6

Problem 3

(∅, {a}) (∅, {b}) (∅, {c})

({a}, {a, b}) {a}, {a, c}) {b}, {a, b}) ({b}, {b, c}) {c}, {a, c}) {c}, {b, c})

({a, b}, {a, b, c}) ({b, c}, {a, b, c}) ({a, c}, {a, b, c})

Problem 4

设有穷偏序集(S, ≦), 任取(a, b)属于它的覆盖关系的自反传递闭包

则或有a=b∨a<b即a≦b, 或存在序列a1, a2, …, an满足a<a1<a2<…<an<b

由传递性也有a≦b. 则覆盖关系的自反传递闭包包含于这个偏序集

又任取a<b, 如果不存在z∈S使得a<z<b, 则(a, b)属于覆盖关系

否则存在序列a<a1, a2, …, an满足a1<a2<…<an<b, 其中(a, a1), (a1, a2), …, (an, b)

都属于覆盖关系, (a, b)属于它的自反传递闭包, 偏序集包含于覆盖关系的这个闭包

综上所述, 偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包, 可以从它的覆盖关系构造出来

Problem 5

a) {1, 2}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4} b) {1}, {2}, {4}

c) 不存在 d) 不存在

e) {2, 4}, {2, 3, 4} f) {2, 4}

g) {3}, {4}, {3, 4} h) {3, 4}

Problem 6

设有穷非空偏序集S, 选择S的一个元素a0, 如果a0不是极大元素, 那么存在元素a1

满足a0<a1, 如果a1不是极大元素, 那么存在元素a2满足a1<a2, 继续这一过程

使得如果an不是极大元素, 那么存在an+1满足an<an+1

因为在这个偏序集只有有穷个元素, 所以这个过程一定会结束并且具有极大元素an

Problem 7

集合S={1, 2, 3, …, 100}, 任取x∈S则x/x=1=2^0, 关系R在S上自反

任取x, y∈S, 若存在k1≧0满足y/x=2^k1, 且存在k2≧0使得x/y=2^k2

则有2^(k1+k2)=1, k1=k2=0, 即y/x=x/y=1, y=x, 关系R在S上反对称

任取x, y, z∈S, 若xRy, yRz即存在k1, k2≧0使得y/x=2^k1, z/y=2^k2

则有z/x=2^(k1+k2), 存在k3=k1+k2≧0满足z/x=2^k3, xRz, 关系R在S上传递

综上所述, R是S上的偏序关系, 即{S, R}是一个偏序集

Problem 8

A = {1, 2, 3, 6, 9, 12, 27, 54}, |为A上的整除关系, 则有偏序集(A, |)

1) 24 54

2) A中最长链长度为4, 为{1, 2, 4, 24}, {1, 2, 6, 24},

4 6 9 {1, 2, 6, 54}, {1, 3, 6, 24}, {1, 3, 6, 54}, {1, 3, 9, 54}

2 3 3) A中元素至少可以划分成4条互不相交的反链

它们分别为: {1}, {2, 3}, {4, 6, 9}和{24, 54}

1

Problem 9

取f: A→2^A, f(a)为A中所有满足x≤a的元素组成的集合

对任意a, b∈A, 若a≤b, f(a)中任取x满足x≤a, 由传递性有x≤b, x∈f(b), f(a)⊂f(b)

对任意a, b∈A, 若f(a)⊂f(b),任取x∈f(a)有x∈f(b), 所有x≤a的x满足x≤b, a≤b

综上所述, 存在函数f使得f(a) ⊂ f(b) ⇔ a ≤ b.

Problem 10

给定1, 2, …, mn+1(=k)的一种排列v1v2…vk, 定义集合：A={ (i,vi) | i=1, 2, …, mn+1 }

建立两个偏序关系R1和R2 : (i, vi)R1(j, vj) iff (i<j并且vi<vj）或者(i, vi)=(j, vj)

(i, vi)R2(j, vj) iff (i<j并且vi>vj）或者(i, vi)=(j, vj)

R1∩R2 = IA, R1∪R2 = A×A //R1的链是R2反链

则一定存在A的一个至少含m+1或n+1个元素的子集, 它是R1的链或者R2的链

若R1链的长度均≤n且≤m, 即R2反链的大小均≤n且≤m

则存在k≤n且k≤m的R2覆盖, 有长度超过n或m的R2链, 否则元素个数≤mn, 矛盾